ثانوية الليمون
ثانية باكالوريا

واجب رقم 1 من الدورة الأولى
فوج: 2k * علوم فيزيائية *

2020
2021

يمكن استخدام المحسبة * القلم الأحمر غير مسموح به.

بالتوفيق

	(النقطة)
التمرين الأول: (الدالة العكسية)	14 pts
f دالة مُتخاطة معرفة بالتعبير: $f(x)=\dfrac{3x+1}{3x-6}$	
وليكن المجال: $I=[4,+\infty[$	
1°/ بين أن f معرفة ومتصلة على المجال I.	2
2°/ بين أن f دالة تناقصية قطعا على المجال I.	2
3°/ استنتج أن f تقبل دالة عكسية من مجال J نحو I.	2
4°/ أحسب قيمة $f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$	2
5°/ حدد المجال J وبين أن: $(\forall x\in J)\quad f^{-1}(x)=\dfrac{6x+1}{3x-3}$	6
التمرين الثاني: (مبرهنة القيم الوسيطية)	6 pts
نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\dfrac{x^3}{4}+\dfrac{x^2}{2}-1=0$	
1°) برهن أن المعادلة تقبل على الأقل حلا $\alpha\in]1,2[$	3
2°) تحقق مما يلي: $\dfrac{\alpha}{2}+1=\dfrac{2}{\alpha^2}$	2
3°) هل $\alpha\in\mathbb{N}$ ؟ (مع التعليل)	1

3 ثانوي

PC 3

Scanné avec CamScanner

تمرين 1 : لنعتبر : $f(x)=\dfrac{3x+1}{3x-6}$ و $I=[4,+\infty[$

1° / لدينا :

$$D_f=\{x\in\mathbb{R} \,/\, 3x-6\neq 0\}$$

$$=\mathbb{R}-\{2\}=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$$

بما أن : $I\subset D_f$ فإن f معرفة على I.

طريقة أخرى
اذا كان $x\in I$ فإن : $x\geq 4$ اذن : $3x-6\geq 3\times4-6$ أي $3x-6\geq 6>0$ ومنه $3x-6\neq 0$ اذن f معرفة على I

الاتصال : f دالة جذرية.

اذن f متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها.

بما أن f معرفة على I فإنها متصلة عليه.

2° / ليكن x من I :

$$f'(x)=\frac{\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & -6\end{vmatrix}}{(3x-6)^2}=\frac{(3)(-6)-3}{(3x-6)^2}$$

$$=\frac{-18-3}{(3x-6)^2}<0$$

اذن f تناقصية قطعا على I.

3° / لدينا مما سبق :

f متصلة على المجال I
f تناقصية قطعا على المجال I

اذن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على المجال : $J=f(I)$ نحو المجال I.

4°/ حساب $f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$: نضع $\alpha = f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$

لدينا : $f(\alpha) = f\left(f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{3}{2}$ إذن : $\frac{3\alpha+1}{3\alpha-6} = \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow 2(3\alpha+1) = 3(3\alpha-6)$$

$$\Leftrightarrow 6\alpha + 2 = 9\alpha - 18 \Leftrightarrow -3\alpha = -20 \Leftrightarrow \alpha = \frac{20}{3}$$

إذن :

$$\boxed{f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{20}{3}}$$

5°/

$$J = f(I) = f([4;+\infty[) = \left]\lim_{+\infty} f \,;\, f(4)\right]$$

$$= \left]\lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{3x} \,;\, \frac{3\times4+1}{3\times4-6}\right] = \left]1\,;\,\frac{13}{6}\right]$$

ليكن x من $J = \left]1;\frac{13}{6}\right]$ و y من $I = [4,+\infty[$

لدينا :

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{3y+1}{3y-6} = x \Leftrightarrow 3y+1 = 3xy - 6x$$

$$\Leftrightarrow 3y - 3xy = -1 - 6x$$

$$\Leftrightarrow y(3-3x) = -1-6x$$

بما أن $x > 1$ فإن $3-3x \neq 0$ إذن : $y = -\frac{1+6x}{3-3x}$

ومنه : $f^{-1}(x) = \frac{6x+1}{3x-3}$ لكل x من J.

التمرين 2

$(x \in \mathbb{R}) \quad \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{2} - 1 = 0$

1°/ الدالة : $f : x \longmapsto \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{2} - 1$ مستمرة على المجال : $[1 ; 2]$ ورتيبا :

$f(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1+2-4}{4} = -\frac{1}{4} < 0$

$f(2) = \frac{8}{4} + \frac{4}{2} - 1 = 2 + 2 - 1 = 3 > 0$

اذا : $f(1) \times f(2) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطة

المعادلة ، $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا $\alpha \in]0;1[$

2°/ نعلم أن α حل للمعادلة اذا : $\frac{\alpha^3}{4} + \frac{\alpha^2}{2} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\alpha^3}{4} + \frac{\alpha^2}{2} = 1$

نضرب الطرفين في $\frac{2}{\alpha^2}$:

$\frac{2}{\alpha^2} \times \left(\frac{\alpha^3}{4} + \frac{\alpha^2}{2}\right) = \frac{2}{\alpha^2} \times 1$

ننشر ثم نبسط :

$\boxed{\frac{\alpha}{2} + 1 = \frac{2}{\alpha^2}}$

3°/ $\alpha \notin \mathbb{N}$ لأن : $\alpha \in]1;2[$

والمجال $]1;2[$ لا يحتوي على أعداد صحيحة طبيعية.

ثانية باك ع
ثانوية الليمون

واجب رقم 1 من الدورة الأولى
فوج : 2k * علوم فيزيائية *

2020
2021

الحاسبة مسموح بها * القلم الأحمر غير مسموح به

بالتوفيق!

النقطة	
14pts	**التمرين 1 : [الدالة العكسية]**
	نعتبر الدالة f المعرفة بالتعبير: $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$
	وليكن المجال: $I=[3;+\infty[$
2	1°/ بين أن الدالة f متصلة على المجال I.
2	2°/ بين أن f تناقصية قطعا على المجال I
2	3°/ استنتج أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J نحو I.
2	4°/ قارن العددين: $f^{-1}(2)$ و $f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$ دون حسابهما.
6	5°/ حدد المجال J وبين أن: $(\forall x\in J)\quad f^{-1}(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$
6pts	**التمرين 2 : [مبرهنة القيم الوسطية]**
	نعتبر المعادلة: $\dfrac{x^3}{8}+\dfrac{x^2}{2}-1=0$
3	1°) برهن أن المعادلة تقبل على الأقل حلا $\alpha\in]0;2[$:
1	2°) تحقق أن: $\alpha\in]1;2[$.
2	3°) بين العلاقة: $\beta^3+2\beta^2-1=0$ حيث: $\beta=\dfrac{\alpha}{2}$

PC.2

تمرين 1 :

$I = [3, +\infty[\quad ; \quad f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

1° / f دالة جذرية ، اذن f متصلة على كل مجال من مجموعة تعريفها D_f . لدينا :

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x-2 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$

$=]-\infty; 2[\cup]2, +\infty[$

و بما أن : $I \subset]2, +\infty[$ اذن f متصلة على I

2° / لكل x من I لدينا :

$$f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{(x-2)^2} = \frac{-2-(-1)}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0$$

اذن f تناقصية قطعا على المجال I .

3° / من خلال ما سبق نعلم أن :

f متصلة على I و f تزايدية قطعا على I اذن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على المجال $J = f(I)$ نحو I .

4° / لدينا : $\frac{3}{2} < 2$ و f^{-1} تناقصية اذن : $f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) > f^{-1}(2)$

تذكير : f و f^{-1} لهما نفس الرتابة .

5° /

$J = f(I) = f([3, +\infty[) =]\lim_{+\infty} f ; f(3)]$

$J =]1 ; 2]$

حساب $f^{-1}(x)$: ليكن x من $J =]1;2]$ و y من I

لدينا: $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$

$$\Leftrightarrow \frac{y-1}{y-2} = x \Leftrightarrow y - 1 = xy - 2x$$

$$\Leftrightarrow y - xy = 1 - 2x$$

$$\Leftrightarrow y(1-x) = 1 - 2x$$

بما أن : $x \in]1;2]$ فإن : $1 - x \neq 0$

اذن : $y = \frac{1-2x}{1-x} = \frac{2x-1}{x-1}$ ومنه :

$f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ لكل x من J.

تمرين 2 حل

$$\frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{2} - 1 = 0$$

/1° الدالة : $f : x \mapsto \frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{2} - 1$ متصلة

على المجال $[0;2]$ ولدينا :

$f(0) = -1$ و $f(2) = \frac{8}{8} + \frac{4}{2} - 1 = 2$

اذن $f(0) \times f(2) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية

المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا $\alpha \in]0;2[$.

/2° التحقق : لدينا : $f(2) = 2 > 0$

و $f(1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{-3}{8} < 0$ اذن : $f(1) \times f(2) < 0$

ومنه : $1 < \alpha < 2$

/3°

نضع: $\beta = \frac{\alpha}{2}$ إذن: $\alpha = 2\beta$

وبما أن: α حل للمعادلة: $f(x) = 0$

فإن: $\frac{\alpha^3}{8} + \frac{\alpha^2}{2} - 1 = 0$

نعوض: $\frac{(2\beta)^3}{8} + \frac{(2\beta)^2}{2} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{8\beta^3}{8} + \frac{4\beta^2}{2} - 1 = 0$

إذن: $\boxed{\beta^3 + 2\beta^2 - 1 = 0}$ —*fin*—

سؤال إضافي: ماذا تستنتج مما سبق (سؤال 13°)

لدينا: $\alpha \in]1 ; 2[\Longleftrightarrow \beta = \frac{\alpha}{2} \in]\frac{1}{2} ; 1[$

$\alpha \in]1 ; 2[$ حل للمعادلة $\frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{2} - 1 = 0$

إذن:

يوجد $\beta \in]\frac{1}{2} ; 1[$ حل للمعادلة:

$$x^3 + 2x^2 - 1 = 0$$